Professeur : Elabidi Zahi	Lycée de Sbeïtla Série d'exercices Thème : Suites réelles Année scolaire : 2015 // 2016	Mathématiques 4ème Maths

Exercice 01

Soit a un réel strictement supérieur à 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2a \\ u_{n+1} = \dfrac{a^2 + u_n^2}{2u_n}, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$

2) Montrer que (u_n) est une suite décroissante

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - a \le \frac{1}{2}(u_n - a)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - a \le a\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + a}{u_n - a}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n^2$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{2^n}$

c) Exprimer alors u_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 02

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+3u_n^2}}{2}, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

2) a) Montrer que (u_n) est une suite monotone

b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$ .Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + u_{n+1}}{1 + v_n u_{n+1}}, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - v_n)$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exercice 03

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

1) Montrer que (u_n) est décroissante minorée ; que peut- on en déduire ?

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n}$ .En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + ... + \frac{n}{2^{n-1}}$

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n en fonction de n

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = n(\sin x)^{n-1}$ où x est réel de $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$

a) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n et u_n .En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = 1 + 2\sin x + 3\sin^2 x + ... + n(\sin x)^{n-1}$

Montrer que $(1 - \sin x)T_n = -v_n \sin x + \frac{1 - (\sin x)^n}{1 - \sin x}$ .En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

Exercice 04

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 - \sqrt{u_n^2 + 9}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$

b) Montrer que (u_n) est une suite croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} u_k$ .Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $w_n = 2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + n^2 v_n$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$ on a $u_{k+1} \geq \frac{3 - u_k}{2}$

(On pourra remarquer que (u_n) est croissante)

b) En déduire que $w_n \geq 3n + 3$ .Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$