

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-2x); \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x); \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-3x+1); \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} \left[\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+\dots+x^n) \right], n \in \mathbb{N}^*; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}); \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x-1}{3x-2}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x}-1}{x}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}; \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2 \right); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)-1}{4\sin^2(x)-3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}.$$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$.

Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$

EXERCICE N°3

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$.

1°) Montrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2-\cos x)}$

EXERCICE N°4

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 2 \sin x$

1°) a- Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b- En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) Soit la fonction g défini sur \mathbb{R} par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty[\right]$: $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interprète géométriquement le résultat.

EXERCICE N°5

Soit la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{1 + \sqrt{x}}$.

1°) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 0, on a : $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq \varphi(x) \leq 1$

2°) En déduire la limite de φ en $+\infty$.

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty[\right]$ par : $f(x) = \frac{-x + \cos x}{2x+1}$

1°) Démontrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$ on a : $\frac{-x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{-x+1}{2x+1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.



EXERCICE N°7

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ x & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

- 1°) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2°) Pour quelle valeur de a , f est continue en 0 .
- 3°) Préciser suivant a , l'ensemble de continuité de f
- 4°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x) + 1 - x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot f(x)$

EXERCICE N°8

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2m-x}{2-x} & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{x^2+1}{x^2+2x-4} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

- 1°) Trouver m pour que f soit continue en 1 .
- 2°) Pour la valeur du réel m trouvée. Etudier la continuité de f en $x_0 = 3/2$.

EXERCICE N°9

$$f(x) = \begin{cases} (1+3a)x^2 - 3x & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\\ \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 5x + 2} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\\ \sqrt{4x^2 - 1} - ax - 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

- 1°) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2°) Etudier les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- 3°) Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 .
- 4°) Préciser suivant a , l'ensemble de continuité de f .

EXERCICE N°10

Répondre par Vrai ou Faux.

- 1°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout réel x , $f(x) > g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = +\infty$
- 2°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si $g(x) < 0$ pour tout x , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$.
- 3°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, alors soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

EXERCICE N°11

On admet l'existence d'une limite réelle en 0 pour $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

- 1°) En transformant convenablement $f(2x)$, trouver la valeur de cette limite.

2°) Utiliser le résultat précédent pour déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{x^4}$

EXERCICE N°12

- 1°) Démontrer que l'équation : $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution $a \in]1; 2[$
- 2°) Donner une valeur approchée par défaut de cette a à 10^{-1} près.

EXERCICE N°13

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 4x + 7 = 0$ admet au moins une racine réelle. Plus généralement, montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle. Qu'en est-il si le degré est pair ?

