EXERCICE 01

Soit $f(x)=x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1- Montrer que f admet sur $]-1,+\infty[$ une primitive F.

2- Déterminer $F(x)$ sachant que $F(3)=2$

EXERCICE 02

Soit $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$; $x\in]2,+\infty[$

1- Déterminer trois réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

2- En déduire la primitive de f qui s'annule en 3

EXERCICE 03

Soit $g(x)=\cos(3x).\sin^3(x)$

1- Linéariser $g(x)$

2- Déterminer la primitive G de g qui s'annule en 0

EXERCICE 04

Soit $h(x)=[1-2\sin(x)]\cos(x)$

1- Justifier l'existence des primitives de h sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la primitive H de h qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 05

On considère la fonction f définie sur $]0,\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$

1- Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2- Soit g la restriction de f à $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ vers un intervalle I que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur I et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ lorsqu'il existe.

c) Déterminer une primitive F de la fonction h définie par

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$$

❖❖EXERCICE 06❖❖

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan^2(x)$, on désigne par F la primitive de f qui s'annule en 0.

1- Calculer $F\circ g(0)$

2- Montrer que $F\circ g$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $(F\circ g)'(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

3- En déduire l'expression de $(F\circ g)(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4- Calculer $F(1)$

❖❖EXERCICE 07❖❖

Soit $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \quad ; \quad x\in[0,+\infty[$

1- Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g qui s'annule en 0

2- Soit $H(x)=G[\tan(x)] \quad ; \quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $H'(x)$

b) En déduire que $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $H(x)=x$. Calculer $G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3- On pose pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $H(x)=G\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+G\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $H'(x)$.

b) En déduire que $G\left(\dfrac{1}{2}\right)+G\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 08

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F sa primitive sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1- On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $G(x)=F\left[1-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer $G(x)$ pour tout $x\in[0,\pi[$ puis calculer $F(0)$

2- Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$, on a : $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$

3- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{n,n+1,n+2,\dots,2n\}$, on a :

$$F\left(\frac{1}{n}\right)\leq F\left(\frac{1}{k}\right)\leq F\left(\frac{1}{2n}\right)$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$